

、過渡現象における計算において、数学フーリエ変換より既知のラプラス変換の正・両方向ラプラス変換の流れで、線形微分方程式で表わされる過渡現象を計算可能となる。(フーリエ級数や元の微分方程式)

参考まで、フーリエ変換は式。 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varepsilon^{-j\omega t} dt$ (1)

(1)式で、 $g(t) = \varepsilon^{-\delta t}$ とおくと $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{(\delta+j\omega)t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varepsilon^{-j\omega t} dt$ (2)

(2)式で δ は実数で $\delta + j\omega = j$ の関係にある複素周波数 j を考えると、変数 ω と

置換すると、 $d\omega = \frac{1}{j} d\delta$ となり、 $f(\omega)$ は式。

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} f(t) \varepsilon^{jt} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varepsilon^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

(3)式より $F_{II}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varepsilon^{-\delta t} dt$ と定義すると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F_{II}(\delta) \varepsilon^{jt} d\delta \quad (4)$$

(4)式が所謂(正方向)ラプラス変換で $(t=0)$ での原因の瞬時の両方向(負方向、正方向)に寄与する。

上記での $F_{II}(\delta)$ は線形微分方程式で表わせば、正方向(正方向)のみとなり

原 $F(\omega)$ 表示 定数係数

$$F_I(\delta) = \int_0^{\infty} f(t) \varepsilon^{-\delta t} dt \quad (5) \text{式とある。 (5)式の } f(t) \text{ は}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(\delta) \varepsilon^{jt} d\delta \quad (6)$$

$F(\omega) \in F(\delta)$ と表示。 $||F|| < \infty$

(5)、(6)式は $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(\delta)]$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(\delta)$ と表わす。

通常、種々の微分方程式をラプラス変換して裏関数の形で解を求める。

前ページより $F(s)$ は
$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (7)$$

式(7)より s の有理式となる。

この(7)式で s が重根の場合
$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-\alpha)^2 \prod_{k=2}^n (s-\alpha_k)}$$

II s が単重根の場合で ($m=n$ といふ) は

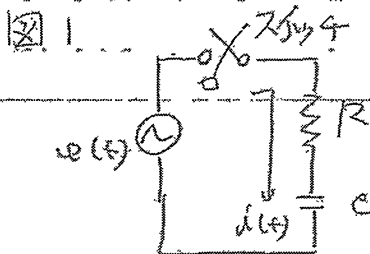
$$F(s) = k_0 + \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{A_m}{s-\alpha_m}$$

III s が複素根の場合 (この次数は2次の場合)

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{Q_1(s) [(s+\alpha)^2 + \omega^2]} \quad (8)$$

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1(s) + A_2}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

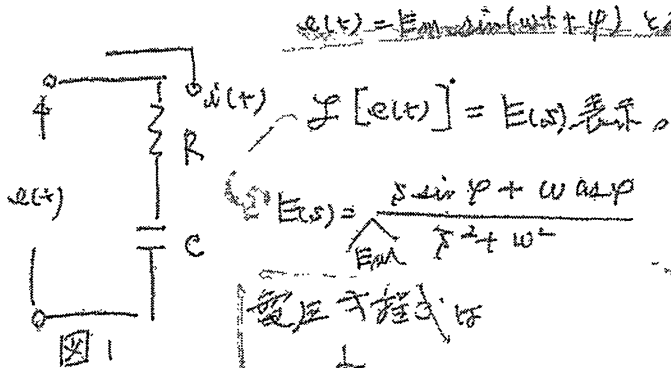
今回は電気回路(交流)の場合に複素根(8)式となる。



$e(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$ で交流電圧を入れた場合の過渡電流 $i(t)$ について考える。

$t=0$ において $Q_0 [C]$ の電荷がある。

(R-C回路) 交流の場合



$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ とおす。

$\mathcal{L}[e(t)] = E(s)$ とする。

(1) $E(s) = \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$

電圧方程式は

$e(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$

(2) (2)式をラプラス変換して

(注)

形 $\sin(\omega t + \varphi)$

$= \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$

(2) および

$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$

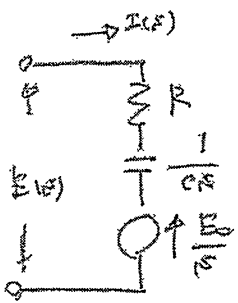
$E(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{i(-)(0)}{Cs}$

$E(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{E_0}{s}$

$I(s) = \frac{E(s) - \frac{E_0}{s}}{R + \frac{1}{Cs}}$ (3)

$i(-)(0) = 0$ として $\frac{E_0}{s} = E_0$ とおくと次式。

(3)式を本問の(2)図2の複回路で利用。



$I(s) = \frac{E(s) - \frac{E_0}{s}}{R + \frac{1}{Cs}}$

(3) (3)式変形 $\frac{s}{R} \times \frac{1}{Cs}$ とおくと

$I(s) = \frac{\frac{s}{R} \{ E(s) - \frac{E_0}{s} \}}{s + \frac{1}{CR}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{s}{(s + \alpha)} \{ E(s) - \frac{E_0}{s} \}$

$\alpha = \frac{1}{CR}$

上式で初期電荷が0と仮定して計算。

$I(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{s}{(s + \alpha)} \times \left(-\frac{E_0}{s} \right) + \frac{1 \times s E(s)}{R(s + \alpha)} = I_1(s) + I_2(s)$ とおくと

$I_1(s) = \frac{-\frac{E_0}{R}}{s + \alpha}$ (4) より $i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(s)]$ は

$\therefore i_1(t) = -\frac{E_0}{R} e^{-\alpha t}$ (5)

$\therefore I_2(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{s}{(s + \alpha)} \cdot E(s) = \frac{s}{R(s + \alpha)} \cdot E_m \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$

$I_2(s) = \frac{E_m}{R} \left\{ \frac{s(s \sin \varphi + \omega \cos \varphi)}{(s + \alpha)(s^2 + \omega^2)} \right\}$ (6)

(R-C回路) について

ω/2ε 係数して -α 係数に 72°

$$I_2(s) = \frac{E_m}{-R} \left\{ \frac{A_1}{s+\alpha} + \frac{A_2 s + A_3}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (7) \quad \text{ω/2ε の } A_1, A_2, A_3 \text{ を求む}$$

$$A_1 = \left[(s+\alpha) I_2(s) \right]_{s=-\alpha} = \left[\frac{s(s \sin \varphi + \omega \cos \varphi)}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-\alpha} = \frac{-\alpha(-\alpha \sin \varphi + \omega \cos \varphi)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$A_1 = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{\omega \cos \varphi - \alpha \sin \varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \right\} = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\theta + \varphi) \quad (8)$$

ω/2ε の A₂s + A₃ について

$$[A_2 s + A_3] = \left[(s^2 + \omega^2) I_2(s) \right]_{s=j\omega} = \left[\frac{s(s \sin \varphi + \omega \cos \varphi)}{(s+\alpha)} \right]_{s=j\omega}$$

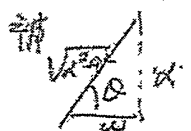
$$j\omega A_2 + A_3 = \frac{j\omega(j\omega \sin \varphi + \omega \cos \varphi)}{\alpha + j\omega} = \frac{j\omega(j\omega \sin \varphi + \omega \cos \varphi)(\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$j\omega A_2 + A_3 = \frac{(-\omega^2 \sin \varphi + j\omega^2 \cos \varphi)(\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$j\omega A_2 + A_3 = \frac{-\omega^2 \alpha \sin \varphi + j\omega^3 \sin \varphi + j\omega^2 \alpha \cos \varphi + \omega^3 \cos \varphi}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$j\omega A_2 = j\omega \frac{\omega^2 \sin \varphi + \omega \alpha \cos \varphi}{\alpha^2 + \omega^2} = j\omega \frac{(\omega \sin \varphi + \alpha \cos \varphi)(\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (9)$$

$$A_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cdot \frac{\omega \sin \varphi + \alpha \cos \varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\theta + \varphi)$$



$$\therefore A_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\theta + \varphi) \quad (10)$$

$$A_3 = \frac{\omega^3 \cos \varphi - \omega^2 \alpha \sin \varphi}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cdot \frac{\omega \cos \varphi - \alpha \sin \varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\therefore A_3 = \frac{\omega^2}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\theta + \varphi) \quad (11)$$

$$I_2(s) = \frac{E_m}{R} \left\{ \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\theta + \varphi) \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\theta + \varphi) \left(\frac{1}{s} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \cos(\theta + \varphi) \right)}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$I_2(\omega) = \frac{E_m}{R} \times \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{-\alpha \cos \alpha}{\alpha + \alpha} + \frac{\omega \sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right\}$$

$$I_2(s) = \frac{E_m}{R} \times \frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \times \left(-\frac{1}{CR} \right) \cdot \frac{\cos(\varphi + \theta)}{s + \alpha} + \frac{E_m}{R} \times \frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \times (\omega) \cdot \frac{\sin \alpha + \omega \cos \alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

交流、

(R-C 回路)

$$I_2(s) = \frac{\sqrt{E_m}}{R} \cdot \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} + \frac{\omega C E_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \cdot \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

↓ 部分

$$I_2(s) = \frac{\omega C E_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \left[\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega CR} \cos(\varphi + \theta) \cdot \frac{1}{s + \alpha} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[I_2(s)] = i_2(t)$$

$$i_2(t) = \frac{\omega C E_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \theta) - \frac{1}{\omega CR} \cos(\varphi + \theta) e^{-\alpha t}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$\left(-\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} \right)$$

$$\therefore i(t) = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega C E_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \theta) - \frac{1}{\omega CR} \cos(\varphi + \theta) e^{-\frac{t}{CR}}$$

山下電気保安管理
事務所