電気工作物設備技術探求

NO. 1

R6.3.1 DATE

今回は自動制御等に関係する数学を取り上げます。（以下電気保安管理事務所）

証明はページ数が多くなりますので省略 形を記憶して下さい。（証明は少し記載します）

ラプラス変換（基）

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ---- $\delta(t)$は単位インパルス関数 ※1（証明）

$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \varepsilon^{-as}$

$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{1}{s}\cdot\varepsilon^{-as}$ ---- ※5（〃）

$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ ---- ※3（証明）

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}[\varepsilon^{\mp\alpha t}] = \frac{1}{s\pm\alpha}$ ---- ※2（証明）

$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ---- ※4（〃）

$\mathcal{L}[\sin(\omega t\pm\varphi)] = \frac{\omega\cos\varphi \pm s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}[\varepsilon^{-\alpha t}\sin(\omega t\pm\varphi)] = \frac{\omega\cos\varphi \pm (s+\alpha)\sin\varphi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}[\varepsilon^{-\alpha t}\cos(\omega t\pm\varphi)] = \frac{(s+\alpha)\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$

$\mathcal{L}[\varepsilon^{rt}f(t)] = F(s-r)$ ---- 裏推移定理

$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \varepsilon^{-as}F(s)$ ---- 表推移定理

$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$ ---- 初期値定理

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ ---- 最終値定理

ラプラス変換定義式

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\varepsilon^{-st}dt$$

$$\Updownarrow$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

ラプラス逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\varepsilon^{st}ds$$

$$\Updownarrow$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

証明※1

単位インパルス関数 $\delta(t)$ の意味（考え方）→図3

図1で $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{d}{dt}y=\frac{1}{a}$ で $a \to 0$ に近づけると

図2で面積 $S_1=S_2=1$

図1で $a \to 0$ になると（$a=0$），$u(t)=1$ なので

$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$ となる。

ただし $\int_{-0}^{+0}\delta(t)\,dt=1=u(t)$

図1

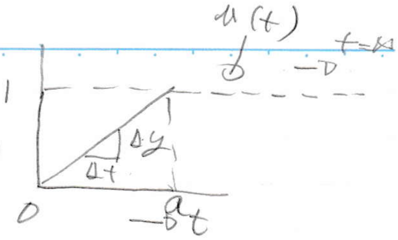


図2

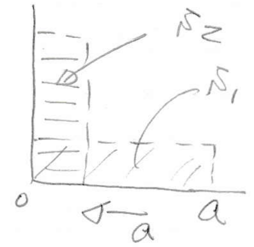
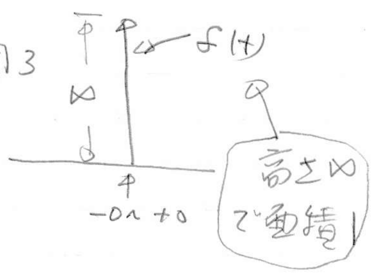


図3



定義式より → $f(t)$ ⇕ $\delta(t)$

＜証明＞

$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{-0}^{\infty}\delta(t)\cdot\varepsilon^{-st}\,dt$ ← 右に部分積分を適用

$\quad = \left[u(t)\cdot\varepsilon^{-st}\right]_{-0}^{\infty}-\int_{-0}^{\infty}u(t)(-s)\varepsilon^{-st}\,dt$

$\quad = \underbrace{\left[u(\infty)\varepsilon^{-\infty}-u(-0)\varepsilon^{0}\right]}_{0}+s\underbrace{\int_{0}^{\infty}u(t)\varepsilon^{-st}\,dt}_{\frac{1}{s}}$

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_{-0}^{\infty}f(t)\varepsilon^{-st}\,dt$

※2（証明）

$\mathcal{L}[\varepsilon^{-\alpha t}]=\int_{0}^{\infty}\varepsilon^{-\alpha t}\varepsilon^{-st}\,dt=\int_{0}^{\infty}\varepsilon^{-(s+\alpha)t}\,dt=\frac{1}{s+\alpha}$

核　　核分の1となる

$\mathcal{L}[\varepsilon^{+\alpha t}]=\frac{1}{s-\alpha}$（同様に）

※3（証明）

$F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt$ → sについて微分 $\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\left\{\int_{0}^{\infty}f(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt\right\}$

定義式 ↑

$\quad = \int_{0}^{\infty}f(t)(-t)\varepsilon^{-st}\,dt$

$-\frac{d}{ds}F(s)=\int_{0}^{\infty}t\,f(t)\,\varepsilon^{-st}\,dt$

$-\frac{d}{ds}F(s)=\mathcal{L}[t\cdot f(t)]$ ①

①式で $f(t) \to u(t)$ なら

$\mathcal{L}[t\,u(t)]=-\frac{d}{ds}\cdot\frac{1}{s}=-\frac{d}{ds}s^{-1}$

$\quad = \frac{1}{s^2}$

$-\frac{d}{ds}U(s)=\mathcal{L}[t\cdot u(t)]$

※4

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{j\omega t}] = \int_0^\infty \varepsilon^{j\omega t} \cdot \varepsilon^{-st} dt = \int_0^\infty \varepsilon^{-(s-j\omega)t} dt = \frac{1}{s-j\omega}$$

又 $\varepsilon^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ より

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{j\omega t}] = \mathcal{L}[\cos\omega t] + j\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$\therefore \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\therefore \mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

※5 $\mathcal{L}[u(t-a)]$ は推移定理を利用し、$\mathcal{L}[u(t-a)] = \varepsilon^{-as}F(s)$ となる

上記で $t-a=\tau$ とおると $t=0$, $-a=\tau$ $t=\tau+a$ である。

$\frac{d}{dt}t = \frac{d}{dt}(\tau+a) = \frac{d}{dt}\tau$ なので $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$ （aは時間の関数でない）

$f(t-a)u(t-a)$ のラプラス変換は

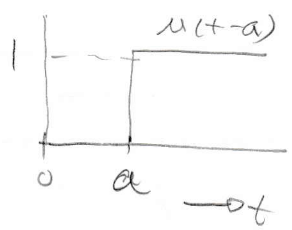
$$\mathcal{L}[\quad] = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)\varepsilon^{-st}dt$$

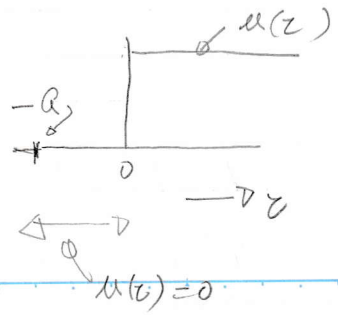
$$\mathcal{L}[\quad] = \int_{-a}^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s(\tau+a)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s\tau}\cdot\varepsilon^{-sa}d\tau$$

$u(\tau)$は $-a\sim0$ 間で $u(\tau)=0$、$\tau\geq0 \sim \tau=\infty$ で $u(\tau)=1$ より $\infty\sim0$ が積分範囲。

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \varepsilon^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s\tau}d\tau}_{=F(s)} = \varepsilon^{-as}F(s)$$





1〜3 までラプラス変換を取り上げた(完)。

このs領域を時間関数にもどす時は $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t)$ ← 例、となる。

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t$

ラプラス変換(逆変換)は自動制御、電気回路(過渡現象)の計算に使用されるが、例えば自動制御のフィードバック制御であれば sの次数が ~~分母~~ 分子の次数によって計算が異なる。

つまり $\underbrace{分母 > 分子}_{通常}$ 又 分母 = 分子 　分母 < 分子 。

又 極が単極か複素極か重極(単極含み)等と複雑である。

要点は問題によって(前回 2/3)、すぐに単極とわかり、部分分数展開によって、A、B、C を求める。つまり形より なれて下さい。

2/3以前、電気回路で複素極は示したので、重極の場合を含めて、カンタンに示します。

(重極) $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)} = \dfrac{P(s)}{(s-s_1)^l \prod_{k=2}^{n}(s-s_k)}$ (1) ← sの多項式。

(1)式の意味は

$(s-s_1)^l \rightarrow (s-s_1)^3、(s-s_1)^2、(s-s_1)^1$

$l \geq 2$

$\prod_{k=2}^{n}(s-s_k) \rightarrow (s-2)(s-3)\cdots(s-s_n)$

(1)式は(2)式となる。 $\left[(s-s_1)^l F(s)\right]_{s=1} = \left[\dfrac{P(s)}{\prod_{k=2}^{n}(s-s_k)}\right]_{s=1}$

上式で $P(s)$ の次数 m で $Q(s)$ の次数が n の時、$m<n$ であれば次式のように部分分数展開出来る。(1)式より

$$F(s) = \underbrace{\frac{A_1}{(s-s_1)^3} + \frac{A_1'}{(s-s_1)^2} + \frac{A_1''}{(s-s_1)^1}}_{重極} + \underbrace{\frac{A_2}{(s-s_2)} + \frac{A_3}{(s-s_3)} + \cdots\cdots \frac{A_n}{(s-s_n)}}_{単極}$$

重極側 A_1, A_1', A_1'' 等は $A_1^i = \dfrac{1}{i!}\left[\dfrac{d^i}{ds^i}(s-s_1)^l F(s)\right]_{s=s_1} = \dfrac{1}{i!}\left[\dfrac{d^i}{ds^i}\dfrac{P(s)}{\prod_{k=2}^{n}(s-s_k)}\right]_{s=s_1}$

単極 ~~も~~ $A_2 \cdots A_n$ は以前説明済み。

1ヶ所訂正します。

※4

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{j\omega t}] = \int_0^\infty \varepsilon^{j\omega t}\cdot\varepsilon^{-st}dt = \int_0^\infty \varepsilon^{-(s-j\omega)t}dt = \frac{1}{s-j\omega}$$

又 $\varepsilon^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ より

$$\mathcal{L}[\varepsilon^{j\omega t}] = \mathcal{L}[\cos\omega t] + j\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

∴ $\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$　∴ $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

※5. $\mathcal{L}[u(t-a)]$ は推移定理を利用し、$\mathcal{L}[u(t-a)] = \varepsilon^{-as}F(s)$ となる

上式で $t-a=\tau$ とおくと $t=0$, $-a=\tau$　$t=\tau+a$ である。

$\frac{d}{dt}t = \frac{d}{dt}(\tau+a) = \frac{d}{dt}\tau$ なので $\frac{d}{dt}=\frac{d}{dt}\tau$　(aは時間の関数でない)

訂正 $\frac{d}{dt}t = \frac{d}{dt}\tau$

$f(t-a)u(t-a)$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[\quad] = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)\varepsilon^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[\quad] = \int_{-a}^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s(\tau+a)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s\tau}\cdot\varepsilon^{-sa}d\tau$$

$u(\tau)$ は $-a\sim0$ 間で $u(\tau)=0$
$\tau\geq0\sim\tau=\infty$ で $u(\tau)=1$ より ∞〜0 が積分範囲。

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \varepsilon^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(\tau)u(\tau)\varepsilon^{-s\tau}d\tau}_{=F(s)} = \varepsilon^{-as}F(s)$$